47 漸化式と数列

391

(1)

$b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ より，

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} \\
&= \frac{\dfrac{4a_n + 3}{a_n + 2} - 3}{\dfrac{4a_n + 3}{a_n + 2} + 1} \\
&= \frac{a_n - 3}{5a_n + 5} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \\
&= \frac{1}{5} b_n
\end{aligned}
$$

補足

$b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ から $a_n = -\dfrac{b_n + 3}{b_n - 1}$ を導き，$a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 3}{a_n + 2}$ に代入し，求められるが，

$b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ とおくような分数漸化式の問題では，$b_{n+1} = rb_n$ となるのがお決まり。

（補足：分数漸化式の解法の原理 3）

(2)

(1)より，$b_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} b_1$

$a_1 = 4$ より，$b_1 = \dfrac{a_1 - 3}{a_1 + 1} = \dfrac{1}{5}$

よって，$b_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = \dfrac{1}{5^n}$

これと $b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ より，$\dfrac{1}{5^n} = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$

両辺に $5^n(a_n + 1)$ を掛けると $a_n + 1 = 5^n a_n - 3 \cdot 5^n$ $\quad \therefore a_n = \dfrac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}$

補足

分数漸化式の解法の原理 1：分数の漸化式の基本形をつくる　その 1

置き換えにより，漸化式から分数漸化式の基本形 $p_{n+1}=\dfrac{Ap_n}{Bp_n+C}$ をつくる。

解

$a_n=p_n+\alpha$ とおくと，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ より，$p_{n+1}+\alpha=\dfrac{4p_n+4\alpha+3}{p_n+\alpha+2}$

よって，

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=\frac{4p_n+4\alpha+3}{p_n+\alpha+2}-\alpha\\&=\frac{(4-\alpha)p_n-(\alpha+1)(\alpha-3)}{p_n+\alpha+2}\end{aligned}$$

したがって，

$\alpha=3$ のとき

$p_{n+1}=\dfrac{p_n}{p_n+5}$ より，$\dfrac{1}{p_{n+1}}=5\cdot\dfrac{1}{p_n}+1$

よって，$\dfrac{1}{p_{n+1}}+\dfrac{1}{4}=5\left(\dfrac{1}{p_n}+\dfrac{1}{4}\right)$

これより，$\dfrac{1}{p_n}+\dfrac{1}{4}=5^{n-1}\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{4}\right)$

ここで，$\dfrac{1}{p_1}=\dfrac{1}{a_1-3}=\dfrac{1}{4-3}=1$ より，$\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

よって，$\dfrac{1}{p_n}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5^n}{4}$ より，$\dfrac{1}{p_n}=\dfrac{5^n-1}{4}$

$\therefore a_n=p_n+3=\dfrac{4}{5^n-1}+3=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

$\alpha=-1$ のとき

同様にして，$a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

以上より，$a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

分数漸化式の解法の原理 2：分数の漸化式の基本形をつくる　その 2

漸化式を分数の漸化式の基本形に $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{ra_n+s}$ に変形する。

解

$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ より，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-\alpha&=\frac{4a_n+3}{a_n+2}-\alpha\\
&=\frac{(4-\alpha)a_n-2\alpha+3}{a_n+2}\\
&=\frac{(4-\alpha)\left(a_n-\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}\right)}{a_n+2}
\end{aligned}
$$

ここで，$a_n-\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}=a_n-\alpha$ とすると，$\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}=\alpha$ より，$(\alpha+1)(\alpha-3)=0$

したがって，

$\alpha=3$ のとき

$a_{n+1}-3=\dfrac{a_n-3}{a_n+2}$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1}-3}&=\frac{a_n+2}{a_n-3}\\
&=5\cdot\frac{1}{a_n-3}+1
\end{aligned}
$$

より，

$$\frac{1}{a_{n+1}-3}+\frac{1}{4}=5\left(\frac{1}{a_n-3}+\frac{1}{4}\right)$$

よって，

$$\frac{1}{a_n-3}+\frac{1}{4}=5^{n-1}\left(\frac{1}{a_1-3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5^n}{4}$$

$$\therefore a_n=\frac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$$

$\alpha=-1$ のとき

同様にして，$a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

以上より，$a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

補足

α は $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ の a_n と a_{n+1} に x を代入した方程式 $x=\dfrac{4x+3}{x+2}$ の解であることと

$\{a_n\}$ の一般項が $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-\alpha$ から得られることから，分数漸化式の解法暗記に

適している。

分数漸化式の解法の原理 3　分数漸化式を変形し等比数列の形にする

等比数列の漸化式 $\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=r\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　$(\alpha\neq\beta)$ をつくる。

解

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=r\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ （$\alpha,\ \beta,\ r$ は実数，ただし $\alpha\neq\beta$ ）の形に変形できると仮定する。

$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ より，

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-\alpha}{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-\beta}$$
$$=\frac{(4-\alpha)a_n+3-2\alpha}{(4-\beta)a_n+3-2\beta}$$
$$=\frac{4-\alpha}{4-\beta}\cdot\frac{a_n-\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}}{a_n-\dfrac{2\beta-3}{4-\beta}}$$

よって， $\dfrac{4-\alpha}{4-\beta}\cdot\dfrac{a_n-\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}}{a_n-\dfrac{2\beta-3}{4-\beta}}=r\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$

これより， $r=\dfrac{4-\alpha}{4-\beta}$， $\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}=\alpha$， $\dfrac{2\beta-3}{4-\beta}=\beta$ ならば上の等式が成り立つ。

$\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}=\alpha$ より $(\alpha+1)(\alpha-3)=0$， $\dfrac{2\beta-3}{4-\beta}=\beta$ より $(\beta+1)(\beta-3)=0$

これと $\alpha\neq\beta$ より， $(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 3),\ (3,\ -1)$

よって， $(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 3)$ のとき $r=5$， $(\alpha,\ \beta)=(3,\ -1)$ のとき $r=\dfrac{1}{5}$

したがって， $(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 3)$ のとき $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-3}=5\cdot\dfrac{a_n+1}{a_n-3}$ となるから，

$$\frac{a_n+1}{a_n-3}=5^{n-1}\cdot\frac{a_1+1}{a_1-3}$$
$$=5^{n-1}\cdot\frac{4+1}{4-3}$$
$$=5^n$$

$$\therefore a_n=\frac{3\cdot 5^n+1}{5^n-1}$$

また，$(\alpha,\ \beta)=(3,\ -1)$のとき$\dfrac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$となるから，同様にして，

$\dfrac{a_n-3}{a_n+1}=\dfrac{1}{5^{n-1}}\cdot\dfrac{a_1-3}{a_1+1}=\dfrac{1}{5^n}$より，$a_n=\dfrac{3\cdot 5^n+1}{5^n-1}$

ゆえに，$a_n=\dfrac{3\cdot 5^n+1}{5^n-1}$

本問は$b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$とおいているから，解法の原理 3 における$(\alpha,\ \beta)=(3,\ -1)$の場合である。

解法の原理 3 は分数漸化式の誘導問題で重要なのでさらに詳しく解説すると，

$a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$，$b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$，$b_{n+1}=h(b_n)=rb_n$とすると，

$b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n))$，$b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n))$より，$b_{n+1}=g(f(a_n))=h(g(a_n))$

(次ページ参考図)

ここで，$g(f(a_n))=h(g(a_n))$について，

$$g(f(a_n))=g(f(a_n))$$
$$=\frac{f(a_n)-\alpha}{f(a_n)-\beta}$$
$$=\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-\alpha}{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-\beta}$$
$$=\frac{4-\alpha}{4-\beta}\cdot\frac{a_n-\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}}{a_n-\dfrac{2\beta-3}{4-\beta}}$$

$$h(g(a_n))=r\cdot g(a_n)$$
$$=r\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$$

より，

$$\frac{4-\alpha}{4-\beta}\cdot\frac{a_n-\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}}{a_n-\dfrac{2\beta-3}{4-\beta}}=r\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$$

これより，$r=\dfrac{4-\alpha}{4-\beta}$，$\dfrac{2\alpha-3}{4-\alpha}=\alpha$，$\dfrac{2\beta-3}{4-\beta}=\beta$ ならば $g(f(a_n))=h(g(a_n))$ が成り立ち，

これを解くと，$(\alpha,\ \beta,\ r)=(-1,\ 3,\ 5),\ \left(3,\ -1,\ \dfrac{1}{5}\right)$

よって，

$(\alpha,\ \beta,\ r)=(-1,\ 3,\ 5)$ のとき $b_{n+1}=5b_n$，$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-3}$ より，$a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

$(\alpha,\ \beta,\ r)=\left(3,\ -1,\ \dfrac{1}{5}\right)$ のとき $b_{n+1}=\dfrac{1}{5}b_n$，$b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ より，$a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

ゆえに，$a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

参考図

$$\begin{array}{ccc}
a_n & \xrightarrow{f} & a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2} \\
\downarrow g & & \downarrow g \\
b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} & \xrightarrow{h} & \begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}
\end{array}$$

392

(1)

$a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$ または $a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n)$ より，$a_{n+2}=(s+t)a_{n+1}-sta_n$

これと $a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n$ より，$s+t=1$，$st=-3$

よって，s と t は $x^2-x-3=0$ の異なる 2 実数解である。ただし，$s>t$

ゆえに，$s=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，$t=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

(2)

$a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$ より，$a_{n+1}-sa_n=t^{n-1}(a_2-sa_1)$　・・・①

$a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n)$ より，$a_{n+1}-ta_n=s^{n-1}(a_2-ta_1)$　・・・②

②－①より，$(-t+s)a_n=s^{n-1}(a_2-ta_1)-t^{n-1}(a_2-sa_1)$

これに $a_1=a_2=1$，$s=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，$t=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ を代入すると，

$$\sqrt{13}a_n=\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$

393

条件より，$n\geq 3$ のとき $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}$　・・・①

このとき $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2a_n$　・・・②　も成り立つから，

②－①より，$a_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$

よって，$(n-1)\{(n+1)a_n-(n-1)a_{n-1}\}=0$

また，$n\geq 3$ より，$n-1\neq 0$

よって，$(n+1)a_n-(n-1)a_{n-1}=0$ より，$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

したがって，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}a_2\\&=\frac{6}{n(n+1)}a_2\end{aligned}$$

また，$a_1+a_2=2^2a_2$ より，$a_2=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{99900}{3}$

ゆえに，$a_{999}=\dfrac{6}{999\cdot 1000}\cdot\dfrac{99900}{3}=\dfrac{1}{5}$

394

(1)

1 段上る行為を A，2 段上る行為を B，3 段上る行為を C とする。

行為の組合せを A の回数をもとにして分類することにより，

a_4

$(A,\ A,\ A,\ A)$，$(A,\ A,\ B)$，$(A,\ C)$，$(B,\ B)$であり，

それぞれの順列の数は 1，3，2，1 だから，$a_4=1+3+2+1=7$

a_5

a_4 の場合と同様にして，

$(A,\ A,\ A,\ A,\ A)$，$(A,\ A,\ A,\ B)$，$(A,\ A,\ C)$，$(A,\ B,\ B)$，$(B,\ C)$より，

$a_5=1+4+3+3+2=13$

(2)

最後の行為が A または B または C であるかで排反に分類できる。

最後が行為 A の場合

$n+2$ 段目まで上っているから，$a_{n+2}\cdot 1=a_{n+2}$

最後が行為 B の場合

$n+1$ 段目まで上っているから，$a_{n+1}\cdot 1=a_{n+1}$

最後が行為 C の場合

n 段目まで上っているから，$a_n\cdot 1=a_n$

よって，$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n\ (n\geq 1)$

補足：最初の行為が A または B または C であるかで分類してもよい。

(3)

$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n\ (n\geq 1)$ より，

$a_6=a_5+a_4+a_3=13+7+4=24$

$a_7=a_6+a_5+a_4=24+13+7=44$

$a_8=a_7+a_6+a_5=44+24+13=81$

$a_9=a_8+a_7+a_6=81+44+24=149$

$a_{10}=a_9+a_8+a_7=149+81+44=274$

または

$$\begin{aligned}a_{10}&=a_9+a_8+a_7\\&=2a_8+2a_7+a_6\\&=4a_7+3a_6+2a_5\\&=7a_6+6a_5+4a_4\\&=13a_5+11a_4+7a_3\\&=13\cdot 13+11\cdot 7+7\cdot 4\\&=274\end{aligned}$$

395

(1)

解法 1

$$\begin{aligned}\alpha_n+\beta_n&=\log_2 a_n+\log_2 b_n\\&=\log_2 a_n b_n\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}a_{n+1}b_{n+1}&=a_n{}^2 b_n\cdot a_n b_n{}^2\\&=(a_n b_n)^3\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}a_n b_n&=(a_1 b_1)^{3^{n-1}}\\&=(4\cdot 2)^{3^{n-1}}\\&=2^{3^n}\end{aligned}$$

よって，$\alpha_n+\beta_n=3^n$

解法 2

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}&=\log_2 a_{n+1}+\log_2 b_{n+1}\\&=\log_2 a_n{}^2 b_n+\log_2 a_n b_n{}^2\\&=3(\log_2 a_n+\log_2 b_n)\\&=3(\alpha_n+\beta_n)\end{aligned}$$

より，

$\alpha_n+\beta_n=3^{n-1}(\alpha_1+\beta_{1n})$

ここで，$\alpha_1=\log_2 a_1=2$，$\beta_1=\log_2 b_1=1$

よって，$\alpha_n+\beta_n=3^n$

(2)

$\alpha_{n+1}=\log_2 a_n{}^2 b_n=2\log_2 a_n+\log_2 b_n=2\alpha_n+\beta_n$

$\beta_{n+1}=\log_2 a_n b_n{}^2=\log_2 a_n+2\log_2 b_n=\alpha_n+2\beta_n$

より，$\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}=\alpha_n-\beta_n$

よって，$\alpha_n-\beta_n=\alpha_1-\beta_1=1$

これと(1)より，$\begin{cases}\alpha_n+\beta_n=3^n\\\alpha_n-\beta_n=1\end{cases}$

この連立方程式を解くことにより，$\alpha_n=\dfrac{3^n+1}{2}$，$\beta_n=\dfrac{3^n-1}{2}$

(3)

$\alpha_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$ より，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \log_2 a_1 + 2\log_2 a_2 + 3\log_2 a_3 + \cdots + n\log_2 a_n \\
&= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n \\
&= \frac{3+1}{2} + 2\cdot\frac{3^2+1}{2} + 3\cdot\frac{3^3+1}{2} + \cdots + n\cdot\frac{3^n+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+n) + \frac{1}{2}\left(3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\left(3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^n\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2}\left(3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^n\right)
\end{aligned}
$$

ここで，

$S_n = 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 3^n$ とおくと，

$3S_n = 3^2 + 2\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4 + \cdots + (n-1)\cdot 3^n + n\cdot 3^{n+1}$ より，

$$
\begin{aligned}
S_n - 3S_n &= 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n\cdot 3^{n+1} \\
&= \frac{3^{n+1}-3}{3-1} - n\cdot 3^{n+1} \\
&= -\frac{(2n-1)\cdot 3^{n+1}+3}{2}
\end{aligned}
$$

$$\therefore S_n = \frac{(2n-1)\cdot 3^{n+1}+3}{4}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2}S_n \\
&= \frac{n^2+n}{4} + \frac{(2n-1)\cdot 3^{n+1}+3}{8} \\
&= \frac{2n-1}{8}\cdot 3^{n+1} + \frac{2n^2+2n+3}{8}
\end{aligned}
$$

396

(1)

$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ の両辺に $\dfrac{1}{p^{n+1}}$ を掛けると，$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$

すなわち $b_{n+1}=b_n+\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$

よって，数列 b_n の階差数列を c_n とすると，$c_n=b_{n+1}-b_n=\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$

(i) $n=1$ のとき

$$b_1=\frac{a_1}{p}=0$$

(ii) $n=2,\ 3,\ \cdots$ のとき

$$\begin{aligned}
b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}\\
&=\frac{\left(-\frac{q}{p}\right)^2-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{q}{p}\right)}\\
&=\frac{p}{p+q}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^2-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right\}\\
&=\frac{p}{p+q}\cdot\frac{q^2}{p^2}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}\\
&=\frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}
\end{aligned}$$

よって，$b_n=\dfrac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$

この右辺に $n=1$ を代入したときの値は 0 となる。すなわち b_1 と等しい。

よって，(i)と(ii)をまとめて，$b_n=\dfrac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$ と表せる。

ゆえに，$b_n=\dfrac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$ （$n=1,\ 2,\ \cdots$）

(2)

(1)および$q=1$より，$b_n=\dfrac{1}{p(p+1)}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}$ すなわち$\dfrac{a_n}{p^n}=\dfrac{1}{p(p+1)}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}$

両辺にp^nを掛けると，$a_n=\dfrac{p^{n-1}}{p+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}$

これと$\dfrac{p^{n-1}}{p+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}=\dfrac{p^{n-1}}{p+1}\left\{1-(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{p^{n-1}}\right\}=\dfrac{p^{n-1}-(-1)^{n-1}}{p+1}$より，

$$a_n=\frac{p^{n-1}-(-1)^{n-1}}{p+1}$$

よって，$a_1=0$，$a_2=\dfrac{p-(-1)}{p+1}=1$，$a_3=\dfrac{p^2-(-1)^2}{p+1}=\dfrac{(p+1)(p-1)}{p+1}=p-1$

したがって，すべての自然数nについて$a_{n+1}\geq a_n$が成り立つためには，

$a_3\geq a_2$，すなわち$p-1\geq 1$が成り立つことが必要である。

よって，必要条件は$p\geq 2$である。

次に，$a_1<a_2$が成り立つことから，

$n\geq 2$において，$p\geq 2$ならば$a_{n+1}\geq a_n$が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{p^n-(-1)^n}{p+1}-\frac{p^{n-1}-(-1)^{n-1}}{p+1}\\&=\frac{p^n-(-1)^n-p^{n-1}-(-1)^n}{p+1}\\&=\frac{p^n-p^{n-1}-2(-1)^n}{p+1}\\&=\frac{p^{n-1}(p-1)-2(-1)^n}{p+1}\end{aligned}$$

ここで，$n\geq 2$，$p\geq 2$より，$p^{n-1}\geq 2^{n-1}\geq 2$，$p-1\geq 2-1=1$

よって，$p^{n-1}(p-1)-2(-1)^n\geq 2\cdot 1-2(-1)^n\geq 2\{1-(-1)^n\}\geq 0$

ゆえに，$a_{n+1}-a_n\geq 0$ すなわち$a_{n+1}\geq a_n$

以上より，$p\geq 2$であることは$a_{n+1}\geq a_n$であるための必要十分条件である。

よって，$p\geq 2$

397

(1)

異なる 3 数を$(a,\ b,\ c)$（$a>b>c$）と表す。

s_3

$(3,\ 2,\ 1)$より，$s_3=3-1=2$

s_4

$(4,\ 3,\ 2)$，$(4,\ 3,\ 1)$，$(4,\ 2,\ 1)$，$(3,\ 2,\ 1)$より，

$s_4=(4-2)+(4-1)+(4-1)+(3-1)=10$

s_5

$(5,\ 4,\ 3)$，$(5,\ 4,\ 2)$，$(5,\ 4,\ 1)$，$(5,\ 3,\ 2)$，$(5,\ 3,\ 1)$，$(5,\ 2,\ 1)$，$(4,\ 3,\ 2)$，$(4,\ 3,\ 1)$，$(4,\ 2,\ 1)$，$(3,\ 2,\ 1)$より，

$s_5=(5-3)+(5-2)+(5-1)+(5-2)+(5-1)+(5-1)+s_4=30$

(2)

s_{k+1}＝最大数が$k+1$のときの「最大数－最小数」の和

＋最大数がk以下のときの「最大数－最小数」の和

＝最大数が$k+1$のときの「最大数－最小数」の和＋s_k

より，$s_{k+1}-s_k$＝最大数が$k+1$のときの「最大数－最小数」の和

ここで，最大数が$k+1$のときの「最大数－最小数」の和をSとする。

異なる 3 数を$(k+1,\ k+1-i,\ m)$（$k+1>k+1-i>m$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$）とすると，

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ k-i$

したがって，2 番めに大きい数が$k+1-i$のときの最大数と最小数の差の和は

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k-i}\{(k+1)-j\}&=(k-i)(k+1)-\frac{(k-i)(k-i+1)}{2}\\&=\frac{(k-i)(k+i+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}\{k(k+1)-(i^2+i)\}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\{k(k+1)-(i^2+i)\}\\&=\frac{1}{2}\left[(k-1)k(k+1)-\left\{\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+\frac{(k-1)k}{2}\right\}\right]\\&=\frac{(k-1)k(k+1)}{3}\end{aligned}$$

ゆえに，$s_{k+1}-s_k=\dfrac{(k-1)k(k+1)}{3}$

補足

まず調べることから，

$(k+1,\ k,\ m)$ のとき

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ より，$(k+1)-m=2,\ 3,\ \cdots,\ k$

$(k+1,\ k-1,\ m)$ のとき

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ k-2$ より，$(k+1)-m=3,\ 4,\ \cdots,\ k$

$(k+1,\ k-2,\ m)$ のとき

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ k-3$ より，$(k+1)-m=4,\ 5,\ \cdots,\ k$

$\vdots$

$(k+1,\ k+1-i,\ m)$ のとき

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ k-i$ より，$(k+1)-m=i+1,\ i+2,\ \cdots,\ k$

$\vdots$

$(k+1,\ 2,\ m)$ のとき

$m=1$ より，$(k+1)-m=k$

(3)

$n=3$ のとき

$s_3=2$

$n\geq 4$ のとき

$$
\begin{aligned}
s_n &= s_3+\sum_{k=3}^{n-1}(s_{k+1}-s_k)\\
&=2+\frac{1}{12}\sum_{k=3}^{n-1}\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)\}\\
&=2+\frac{1}{12}\{-24+(n-2)(n-1)n(n+1)\}\\
&=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{12}
\end{aligned}
$$

ここで，$n=3$ のとき $\dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{12}=2$

これは，$s_n=\dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{12}$ が $n=3$ のときでも成り立つことを示している。

よって，$s_n=\dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{12}$ （$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$）

補足

$n \geq 4$ のときの別解

$$
\begin{aligned}
s_n &= s_3 + \sum_{k=3}^{n-1}(s_{k+1} - s_k) \\
&= 2 + \frac{1}{3}\sum_{k=3}^{n-1}(k-1)k(k+1) \\
&= 2 + \frac{1}{3}\sum_{k=3}^{n-1}(k^3 - k) \\
&= 2 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3 - k) - \sum_{k=1}^{2}(k^3 - k) \\
&= 2 + \frac{1}{3}\left[\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 - \frac{(n-1)n}{2} - (0+6)\right] \\
&= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{12}
\end{aligned}
$$